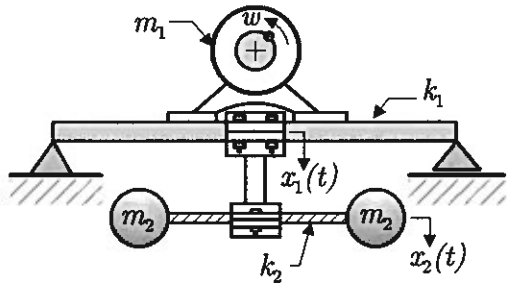
1)(2val) Para um sistema ligeiramente amortecido, caracterizar a resposta nas seguintes situações:

a) perturbação inicial de deslocamento;
b) solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$ para $\omega \ll \omega_n$ e para $\omega \gg \omega_n$.
c) Definir factor de amplificação dinâmica e comentar a seguinte afirmação: " A amplitude de resposta em regime harmónico é controlada nas baixas frequências pela rigidez, nas frequências médias pelo amortecimento e nas altas frequências pela massa." Se achar conveniente, juntar um esboço gráfico.

2)(2val) A análise do comportamento dinâmico de um sistema discreto pode assentar no modelo espacial do sistema.

a) Indicar a(s) principal(s) vantagem(s) da utilização das equações de Lagrange no estabelecimento do modelo espacial. Como é considerado, normalmente, o mecanismo de amortecimento de tipo viscoso nas equações de Lagrange?
b) Indicar que tipo de acoplamento pode apresentar o modelo espacial e qual a sua origem;
c) Escrever, em notação matricial, as expressões da energia cinética e da energia potencial elástica. Caracterizar, justificando, estas duas formas energéticas.



3)(1 val) A figura representa um sistema vibratório ao qual foi acoplado um absorsor de vibrações sintonizado para a frequência de excitação.

a) Representar graficamente a amplitude de resposta do sistema principal antes e após a montagem do absorsor, indicando claramente eventuais pontos notáveis e a posição de funcionamento;
b) Referir as implicações da razão de massas no funcionamento do sistema e/ou na eficiência da solução.

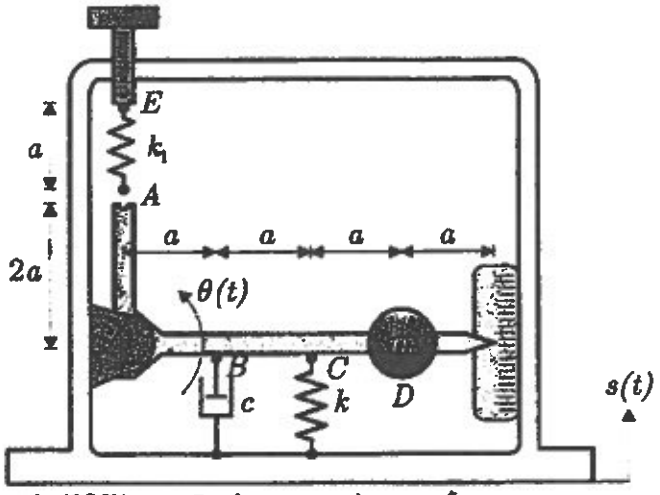
4)(1 val) O isolamento de vibrações consiste em reduzir a grandeza de forças transmitidas por equipamentos para as suas fundações ou em reduzir o movimento de apoios móveis para os equipamentos.

a) Definir transmissibilidade em ambos os casos;
b) Discutir a eficiência do isolamento em termos da massa do equipamento e da rigidez da suspensão;
c) Justificar a razão pela qual, em geral, não se considera o amortecimento no dimensionamento de uma suspensão elástica;
d) Para uma excitação multi frequência, indicar, justificando, qual a frequência a considerar no dimensionamento da suspensão elástica.

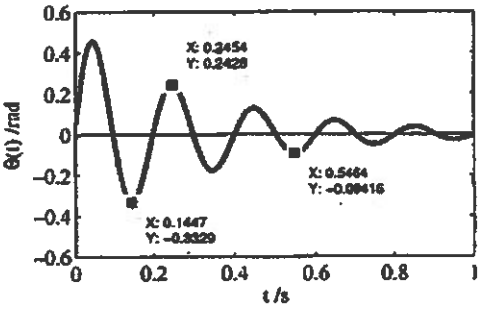
5)(2 val) A resposta forçada de uma viga em flexão pode exprimir-se em termos do deslocamento lateral e/ou dos esforços internos e pode ser determinada por sobreposição modal truncada dos modos naturais de vibração.

a) Estabelecer uma comparação entre a equação característica (cujas soluções são as frequências e as formas naturais de vibração) de um sistema discreto e de um sistema contínuo;
b) Escrever as propriedades de ortogonalidade (ortonormalidade) das formas naturais de vibração de uma viga em flexão;
c) Discutir a selecção e a dimensão da base modal seleccionada para determinação da resposta forçada.
d) Designando as 4 primeiras frequências naturais de uma viga simplesmente apoiada por ω_1, ω_2, ω_3 e ω_4, representar graficamente a função de resposta em frequência de tipo receptância $\alpha_{\ell/2,\ell/3}(\omega)$ na banda de frequências $\left[0;\ 1.5\omega_4\right]$ indicando claramente a posição de cada uma das frequências naturais.

1) (4 val.) A figura representa um transdutor de vibrações constituído por uma barra rígida em forma de **L**, articulada no ponto **O**, com uma massa concentrada $m = 1$ kg no ponto **D**, ligada a um amortecedor de constante c ponto **B** e a uma mola linear elástica de constante k no ponto **C**. No ponto **A** pode ser ligada uma mola linear elástica de constante k_1 e comprimento livre a, sendo o seu comprimento efectivo ajustável através de um parafuso.



Antes de utilização, o mecanismo do transdutor foi sujeito a um teste em regime livre, tendo sido registada a resposta $\theta(t)$ representada no gráfico. Determinar,



a) (10%) a razão de amortecimento ξ;

b) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n.

Considerando a mola **AE** livre (não actuante), assumindo a hipótese de pequenas oscilações e considerando desprezável a inércia da barra, estabelecer:

c) (25%) a equação diferencial (linearizada) do movimento.

d) (10%)Determinar a constante de amortecimento c e a constante de rigidez k;

Para ensaiar o transdutor, aplicou-se um deslocamento harmónico $s(t) = S \sin \omega t$ com uma amplitude $S = 5$ mm e uma frequência $\omega = 3$Hz.

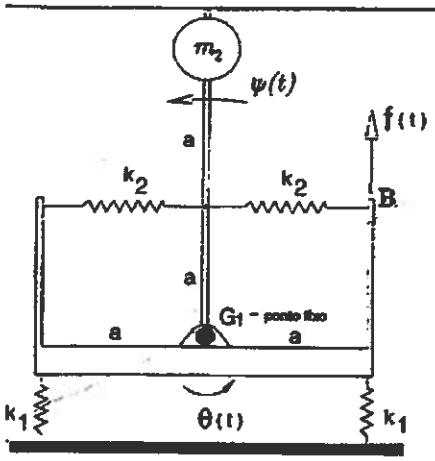
e) (15%) determinar a amplitude S_l lida na régua do transdutor e o respectivo erro ε.

Para corrigir o valor lido, ajustou-se o parafuso da mola **AE** de modo a comprimir a mola para dois terços do seu comprimento livre (elongação $\delta = \frac{1}{3}a$).

f) (10%)Reescrever a equação diferencial do movimento;

Para uma rigidez $k_1 = 4k$,

g) (10%)Calcular a nova frequência natural e o novo valor lido na régua.



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por:

- Corpo 1 - uma estrutura rígida, de massa m_1 e momento de inércia J_{G_1}, ligada ao exterior no ponto G_1 por uma articulação e por duas molas lineares elásticas de igual rigidez k_1. Sobre esta estrutura actua uma força $f(t)$ no ponto B.
- Corpo 2 - uma massa m_2, suportada por uma barra rígida de massa e inércia não considerável, ligada ao exterior pela articulação anterior e ligada ao corpo 1 por duas molas lineares de igual rigidez k_2.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas generalizadas $\theta(t)$ e $\psi(t)$.

a) (30%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Considerando os dados abaixo indicados, determinar:

$$k_1 = 5k \qquad k_2 = 2k \qquad J_{G_1} = 8ma^2 \qquad m_2 = m \qquad a = 0.5\text{m}$$

b) (15%) as frequências e formas naturais de vibração do sistema. Esboçar e comentar as formas naturais de vibração;

c) (15%) as equações do movimento do sistema na base modal;

Tomando para valores de k e m os abaixo indicados, determinar:

$$k = 20000\ \text{N/m} \qquad m = 0.5\ \text{kg}$$

d)(10%) o valor máximo da resposta $\theta(t)$ quando $f(t) = F\,\delta(t)$ (solicitação impulso de valor F aplicada no instante inicial).

e)(10%) a amplitude $\Psi(\omega)$ da resposta $\psi(t)$ da barra quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 25\,\text{rad/s}$.

f)(20%) Tendo em conta a solicitação da alínea anterior, alterar a distância entre a massa concentrada m_2 e o ponto G_1 de forma a que a amplitude $\Psi(\omega)$ da sua resposta seja reduzida de 5%.

3) (4 val.) Na figura representa-se um modelo simplificado das asas e da fuselagem de uma aeronave. As asas são modelizadas por duas vigas de comprimento ℓ ligadas rigidamente entre si por uma massa concentrada m que representa a fuselagem. As vigas têm uma secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e o material possui módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ. O modelo considerado está livre-livre e possui um modo de corpo rígido (translação) com energia elástica nula e frequência também nula.

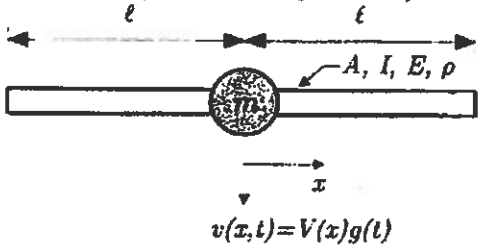
a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

b) (15%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $V(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{x^2}{\ell^2}$ como aproximação da primeira forma natural de vibração (com energia elástica não nula) no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $V(x)$.

c) (30%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração utilizando o quociente de Rayleigh. Exprimir o resultado em função de $\epsilon = \dfrac{m}{2\rho A\ell}$.

d) (20%) Indicar os valores exactos da frequência natural para os casos limite: $m \to 0$ e $m \to \infty$.

e) (20%) Discutir a validade da solução fornecida pelo quociente de Rayleigh para os valores limite: $m \to 0$ e $m \to \infty$. Se necessário, propor uma solução alternativa para a função de aproximação $V(x)$.



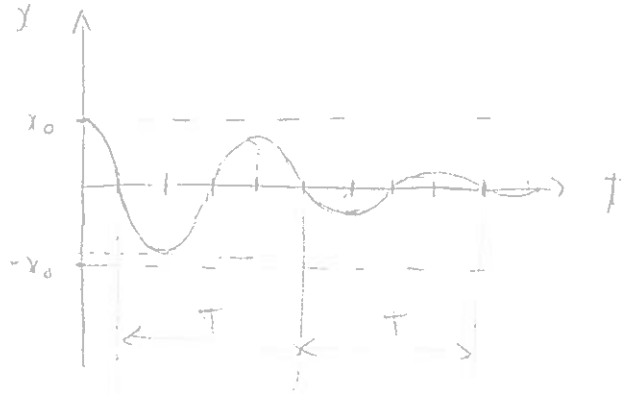
$$v(x,t) = V(x)g(t)$$

Exame de Recurso de 2007-07-12

Parte Teórica

1) Admite-se que se entende por sistema ligeiramente amortecido um sistema em que: $0 < \xi < 1$

a) Após a perturbação inicial de deslocamento a resposta do sistema vai ser uma resposta livre ou natural amortecida, sendo caracterizada por um harmónico (em decaimento) à frequência natural amortecida $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$, com $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}$.



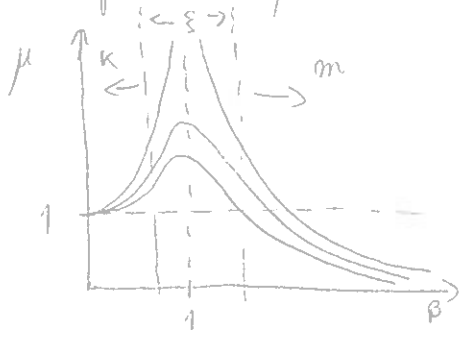
b) Para $\omega \ll \omega_n \Rightarrow \beta \to 0$; $\omega \gg \omega_n \Rightarrow \beta \to \infty$

$$x(t) = \frac{\frac{F}{K}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad ; \quad \phi = \arctan \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

Caracterizando apenas a resposta estacionária, é um movimento harmónico com frequência igual à frequência de excitação e com um desfasamento ϕ em relação à solicitação. Para $\omega \ll \omega_n$, $\beta \to 0$, pelo que a amplitude tenderá para $\frac{F}{K}$ (valor do deslocamento estático). Para $\omega \gg \omega_n$, $\beta \to \infty$, pelo que a amplitude tende para zero. Como se mostrará em c), para $\omega \ll \omega_n$ a resposta é "controlada" pela rigidez e para $\omega \gg \omega_n$ a resposta é controlada pela massa.

c) O factor de amplificação dinâmica é um factor adimensional que multiplicado pelo deslocamento estático, $\frac{F}{K}$, nos dá o valor da amplitude da resposta. Define-se por:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



Comentário à afirmação:

A resposta estacionária define-se: $y(t) = \frac{F}{K}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}\right) = \mu$

Como podemos ver:

- Para baixas frequências ($\beta \to 0$) $\mu \to 1$ pelo que $y(t) = \frac{F}{K}$, provando-se a dependência da rigidez
- Para médias frequências ($\beta \to 1$ ou $w \to w_n$) $\mu = \frac{1}{2\xi}$ mostrando-se a grande influência do amortecimento (principalmente para baixos valores de ξ)
- Para altas frequências ($\beta \to \infty$) $\mu \to 0$ e w torna-se muito importante face a w_n pelo que o termo $\frac{F}{K}$ que também pode ser expresso por $\frac{F}{w_n^2 \cdot m}$ faz notar que a massa passa a ser a propriedade preponderante.

2) ; 3) ; 4) e 5) não sacam.

Parte Prática

1)

a)

$$T = \frac{0,5464 - 0,1447}{2} = 0,20085 \text{ s} \Rightarrow \omega_d = \frac{2\pi}{T} \cong 31,2830 \text{ rad/s}$$

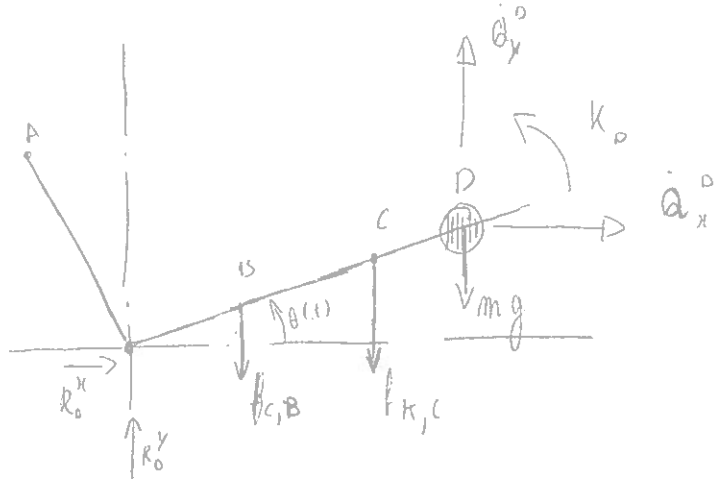
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2 = t_1 + NT)} = \xi \omega_n T N \Leftrightarrow \ln \frac{-0,3329}{-0,09416} = \xi \left(\frac{31,2830}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \times$$

$$\times 0,20085 \times 2 \Leftrightarrow \xi \cong 0,09999 \simeq 0,1000$$

b) $$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \cong 31,4405 \text{ rad/s}$$

c) Diagrama de Corpo Livre:



$$\Sigma M_0 = \Sigma K_0$$

Barra em L, sem inércia desprezável logo:

$$\vec{Q}^L = \vec{0} \; ; \; \vec{K}_G^L = \vec{0} \Rightarrow \vec{K}_0^L = \vec{0}$$

Massa Concentrada:

$$\vec{OD} = \begin{vmatrix} 3a\cos\theta \\ 3a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 3a \\ 3a\,\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{Q}^{D} = m \begin{vmatrix} 0 \\ 3a\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{H}_D = \cancel{[I]} \times \vec{\omega} = \vec{0} \Rightarrow \vec{K}_D = \vec{0}$$

$$\vec{K}_O^{m} = \cancel{\vec{K}_D^{m}} + \vec{OD} \times \vec{Q}^{m} = \begin{vmatrix} 3a\,\theta \\ 3a \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 3am\ddot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ +9a^2 m\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

— " —

Força da mola C:

Sist. Estático: $\theta(t) = 0 \Rightarrow -2a\cos 0 \cdot \left[-K\left(2a\,\mathrm{sen}\,0 - \theta_{md}\right)\right] - 3a\cos 0 \cdot (mg) \Rightarrow \theta_{md} = \frac{3mg}{2K}$

Logo:

$$|f_{K,C}| = K\left[\left(2a\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{3mg}{2K}\right)\right] = K\left(2a\,\theta - \frac{mg}{K}\right)$$

Força do amort.:

$$|f_{C,B}| = C\left[\frac{d}{d\theta}\left(a\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\right] \simeq Ca\dot{\theta}$$

Então, a eq. diff. de movimento fica:

$$\Sigma M_0 = \Sigma K_0 \Rightarrow \quad -a\overset{\approx 1}{\cos\theta}\cdot\left(Ca\dot{\theta}\right) - 2a\overset{\approx 1}{\cos\theta}\cdot\left[K\left(2a\theta - \cancel{\frac{3mg}{2K}}\right)\right] -$$

$$\cancel{-3a\overset{\approx 1}{\cos\theta}\,(mg)} = +9a^2 m\ddot{\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(9a^2 m\right)\ddot{\theta}(t) + \left(a^2 C\right)\dot{\theta}(t) + \left(4a^2 K\right)\theta(t) = 0}$$

Com $m = 1\,kg$

d) $$\xi = \frac{C_{eq}}{C_c} = \frac{a^2 C}{2\,m_{eq}\cdot\omega_n} \Rightarrow 0{,}1000 = \frac{\cancel{a^2}\,C}{2\times 9\,\cancel{a}\times 1\times 31{,}4405} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C \cong 56{,}5929 \quad N\,s/m^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Leftrightarrow 31{,}4405 = \sqrt{\frac{4a^2 K}{9a^2\times 1}} \Leftrightarrow \boxed{K \cong 2224{,}14 \quad N/m}$$

e) $$S(t) = \overset{=0{,}005}{S}\cdot\cos\left(\overset{=6\pi}{\omega}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Então:

$$\left(9a^2 m\right)\ddot{\theta}(t) + \left(a^2 C\right)\dot{\theta}(t) + \left(4a^2 K\right)\theta(t) = 2a\,K\cdot S\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - aC\omega S\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \underbrace{S\sqrt{(2aK)^2 + (aC\omega)^2}}_{\Theta(\omega)}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

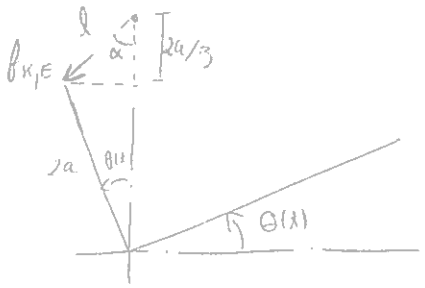
Com $\gamma = \arctan\dfrac{a\omega C}{2aK}$

Amplitude da Resposta:

$$\Theta(\omega) = \frac{\dfrac{S\sqrt{(2aK)^2 + (aC\omega)^2}}{K_{eq}}}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}} \xrightarrow{\text{Substituindo valores}} \Theta(\omega) \cong \frac{0{,}003945}{|a|}$$

$$S_1 = 4a \cdot \underbrace{\sin[\theta(w)]}_{\approx \theta(w)} \cong 4a \cdot \theta(w) = 4 \cdot \frac{0{,}003945}{\text{rad}} = 0{,}01578 \ m \approx \boxed{15{,}8 \ mm}$$

f)



Da cinemática sabemos que:

$$\begin{cases} l \sin\alpha = 2a \sin\theta \\ l\cos\alpha + 2a\cos\theta = 2a + \frac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{2a}{l}\sin\theta \\ \tan\alpha = \frac{2a\cdot\sin\theta}{2a + \frac{2a}{3} - 2a\cos\theta} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{2a\sin\theta}{\sin\alpha} \\ \alpha = \arctan\left[\frac{2a\sin\theta}{2a + \frac{2a}{3} - 2a\cos\theta}\right] \end{cases}$$

Se linearizarmos:

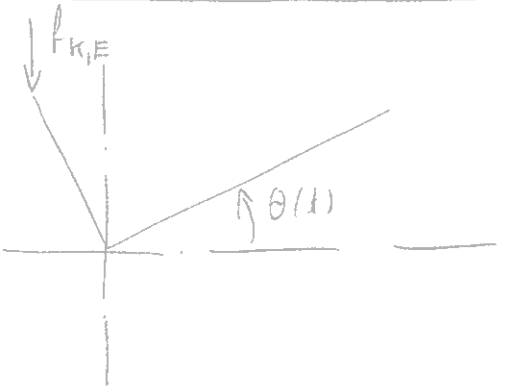
$$\alpha = \arctan\left[\frac{2a\,\theta}{\frac{2a}{3}}\right] = \arctan(3\theta)$$

$$\Downarrow$$

$$l \cong \frac{2a\sin\theta}{\sin(\arctan 3\theta)} \approx \frac{2a\,\theta}{\sin(\arctan 3\theta)}$$

Logo: $|f_{K,E}| = K_1 \cdot (a - l) = K_1 \cdot \left(a - \frac{2a\,\theta}{\sin(\arctan 3\theta)}\right)$

Para simplificar os cálculos:



$$F_{K,E} = K_1\left[\left(2a - 2a\cos\theta + \frac{a}{3}\right)\right] \approx K_1 \cdot \frac{a}{3}$$

Logo: $$M_0^{K,E} = 2a \operatorname{sen}\theta \cdot \left(K_1 \cdot \frac{a}{3}\right) \approx \frac{2a^2}{3} \cdot K_1 \cdot \theta$$

Portanto, a eq. diferencial de movimento fica:

$$\left(9a^2 m\right)\ddot{\theta}(t) + \left(a^2 c\right)\dot{\theta}(t) + \left(4a^2 K - \frac{2a^2}{3}K_1\right)\theta = S\sqrt{(2aK)^2 + (ac\omega)^2}\cos(\omega t -$$

g) $$\omega_n = \sqrt{\frac{4a^2 K - \frac{2a^2}{3}K_1}{9a^2 m}} \approx \boxed{18,1522 \text{ rad/s}} \quad ; \quad \xi = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \approx 0,1697$$

$$\theta(\omega) = \frac{\frac{S\sqrt{(2aK)^2 + (ac\omega)^2}}{K_{eq}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \approx \frac{0,007121}{|a|}$$

$$S_1 = 4a\,\theta(\omega) \approx 0,028484 \text{ m} \approx \boxed{28,5 \text{ mm}}$$

2) ; 3) não pedem!